

Control de caos en modelos económicos

SEPÚLVEDA-JIMÉNEZ, Daniel, LOERA-MARTÍNEZ Jesús y SEPÚLVEDA-ROBLES Daniel Eduardo

D. Sepúlveda`, J. Loera`` y D. Sepúlveda````

`Centro de investigación en Economía y Matemáticas aplicadas de la Universidad Autónoma Chapingo. Carretera México - Texcoco Km. 38.5, 56230 Texcoco de Mora, Méx.

``División de Ciencias Económico-administrativas de la Universidad Autónoma Chapingo. Carretera México - Texcoco Km. 38.5, 56230 Texcoco de Mora, Méx.

````Liceo, Universidad Pedro de Gante

sepjim700@yahoo.com.mx

F. Pérez, D. Sepúlveda, R. Salazar, D. Sepúlveda (eds.) Ciencias Matemáticas aplicadas a la Agronomía. Handbook T-I.- ©ECORFAN, Texcoco de Mora, México, 2017.

## Abstract

An economic system that exhibits chaotic behavior can be stabilized with the use of a hard control or limiter control. In this paper this procedure is used to control the chaos in two models of economic growth Solow type, to show control of this complex behavior are developed the graphic branch corresponding to different values of the upper threshold controller. Control of chaos in the economic model of Benhabib and Day for the model of overlapping generations are also shown.

## 4 Introducción

El estudio de sistemas no lineales que presentan fenómenos dinámicos complejos como bifurcaciones y caos, ha producido en los últimos años un número importante de contribuciones de todas las áreas de la ciencia no lineal. Muchas investigaciones se han desarrollado esencialmente en relación con el análisis de dichos sistemas complejos, sin embargo, recientemente mucha atención se ha dirigido hacia el problema relacionado con el control del caos. En esta dirección los enfoques proceden de diversos campos científicos y además la técnica específica que se emplea está en concordancia con los objetivos y limitaciones planteados por el sistema a analizar. El objetivo habitual que se persigue es que los comportamientos complejos y caóticos deben de ser controlados, llevando el sistema a regímenes más regulares.

Las contribuciones relativas a la supresión general del caos pueden dividirse en dos grandes grupos: en el primero se consideran los sistemas caóticos específicos, mientras que en la segunda clase los sistemas que son el objeto de estudio, se consideran en función de los parámetros. El primero enfoque establece una meta cuantitativa en el espacio de estados, como un punto de equilibrio o un ciclo límite o alguna trayectoria dada y se trata de llevar el sistema a esta dinámica por medio de controles adecuados, en esta dirección se han obtenido resultados importantes con controles pequeños. La mayoría de estos métodos están relacionados con el algoritmo propuesto por Ott, Grebogi y Yorke (OGY), (Ott y col, 1990) y con algunas modificaciones como lo propone Dressler y Nitsche (Dressler y Nitsche, 1992).

Un número más pequeño de las contribuciones se puede considerar como perteneciente a la segunda forma de controlar el caos, en este caso, el objeto en estudio es una clase de sistemas dinámicos, que depende de los parámetros y globalmente se estudian en el espacio de parámetros de estado, ahora, el objetivo de alcanzar es esencialmente cualitativo, normalmente bifurcaciones que aparecen en el sistema original se retrasan con el fin de aumentar la gama de valores de los parámetros para los que el sistema exhibe movimientos regulares. En particular, Abed y colaboradores, (Abed y col, 1992) conducen a este resultado mediante una dinámica de control de retroalimentación lineal (filtro de lavado). Hyötyniemi (Hyötyniemi, 1991) utiliza un controlador robusto con el fin de estabilizar adecuadamente la bifurcación siempre que se produzca.

El caos es a veces indeseable. En muchos casos, queremos evitar y eliminar tales comportamientos. Recientemente hay numerosas técnicas para controlar el caos, además del método presentado por Ott y colaboradores, el control activo, Bai y Lonngren (Bai y Lonngren, 2000), el control basado en el observador, Yang y Chen (Yang y Chen, 2002), retroalimentación y no de retroalimentación del control Yassen y también por Agiza (Yassen, 2003; Agiza, 2002), control óptima inverso Sanchez y colaboradores, (Sanchez y col., 2002), el control adaptativo Yassen y Liao y Lin (Yassen, 2001; Liao y Lin, 1999).

El descubrimiento de nuevos resultados fundamentales en dinámica no lineal y su rápida difusión han proporcionado a la economía herramientas de análisis y el enfoque necesario para abordar con mayor rigor matemático algunos de los difíciles problemas relacionados con la inestabilidad y las fluctuaciones. Existe un consenso amplio entre los economistas acerca de la enorme dificultad presente a la hora de explicar los ciclos económicos, de hecho, a lo largo de los dos últimos siglos se han propuesto multitud de modelos que intentan describir este comportamiento. La teoría del caos y la complejidad a través de un conocimiento profundo de conceptos tales como los atractores, la dinámica caótica, la dimensión fractal, los exponentes de Lyapunov, etc., así como de su aplicación a la investigación analítica y numérica de los modelos de dinámica económica y las series temporales, constituye un vínculo esencial en una cadena de progreso científico que va más allá del simple estudio de las fluctuaciones. Las nuevas realidades exigen un nuevo enfoque metodológico en el que el mundo y la organización económica ya no sean considerados bajo el aspecto del orden y en el que desaparezca la predictibilidad del sistema. Está generalmente aceptado que muchos procesos evolutivos de los sistemas económicos debe ser descrito por las ecuaciones no lineales (Haag,1990; Weidlich, 1991; Weidlich y Braun, 1992; Mosekilde y Thomsen, 1992; Lorenz,1993; Haag, y Hilliges T., 1993). Sin embargo, un rasgo característico de modelos no lineales es la posible aparición de caos determinista. Esto significa que aunque las ecuaciones constitutivas de movimiento son deterministas, sus soluciones pueden presentar una estructura caótica, es decir no periódica (Chen,1988; Mosekilde y Larsen, 1988; Haag,1992; Puu,1992; Feichtinger 1992). La observación de las series temporales de la economía siempre sugiere la presencia de estocasticidad y elementos caóticos en las interacciones y las decisiones de los agentes del mercado. Por lo tanto, los empresarios u otros tomadores de decisiones en el sistema económico pueden enfrentarse a la difícil tarea de tratar con un sistema económico que se comporta de una manera impredecible. Existen varias causas para la imprevisibilidad:

En primer lugar, puede ocurrir que un sistema económico se comporte regularmente perturbado por variables exógenas estocásticas y choques aleatorios. Estas influencias son, por supuesto, no predecibles ya que son causadas por una variedad de factores externos y como consecuencia, se puede provocar que el sistema presente una dinámica compleja con aparición de caos.

En segundo lugar, la dinámica caótica de un sistema económico puede ser generada por la dinámica no lineal de variables endógenas, sin ninguna influencia externa. Este es el caso de caos determinista. A partir de lo anteriormente expuesto es posible concluir que el control del caos es esencial en el conocimiento y análisis de los sistemas no lineales y en particular en la modelación de sistemas económicos que presenten dinámica compleja y caos.

#### **4.1 Metodología**

En este trabajo se usa el control limitador o control duro para eliminar el caos clásico en el modelo logístico, en el modelo de Benhabid y Day, “modelo de generaciones que se traslapan” y en el modelo de Solow. Se describen brevemente cada uno de los modelos económicos, se elaboran las gráficas de bifurcación cuando no hay control de caos y posteriormente se muestra el control de caos aplicando un control duro en el umbral superior para cada uno de los modelos analizados, se presentan los resultados obtenidos y se exponen las conclusiones respectivas.

## 4.1.1 Desarrollo de los modelos y control de caos

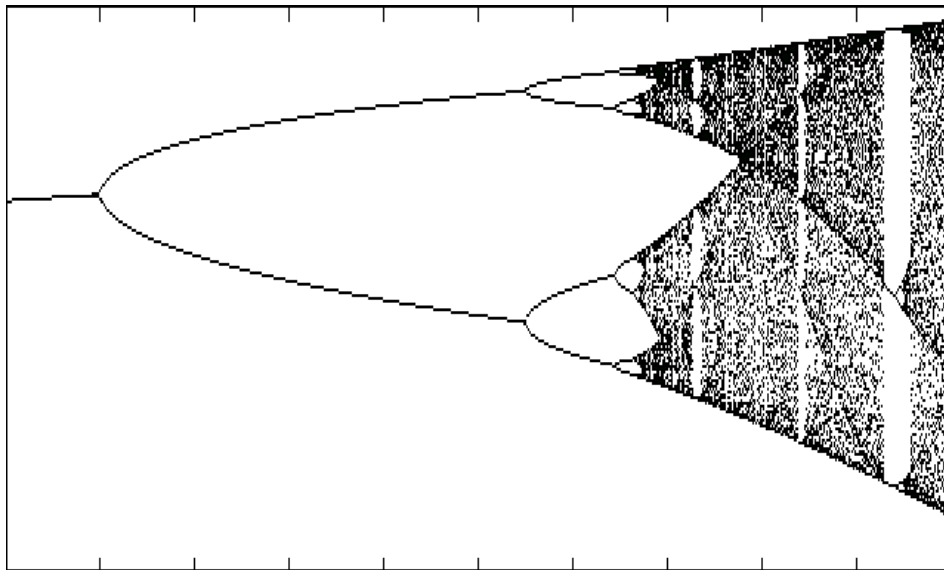
### 4.1.1.1 El modelo logístico y su control limitador

Sea  $x_t$  la densidad o abundancia de una población en un día, mes o año, generación o unidad de tiempo,  $t \in \mathbb{N}$ . Entonces la ecuación que gobierna la densidad de la población o el crecimiento de la población está dada por la ecuación:

$$x_{t+1} = f(x_t) = rx_t(1 - x_t); \quad x \in [0, 1], r \in [0, 4] \quad (4)$$

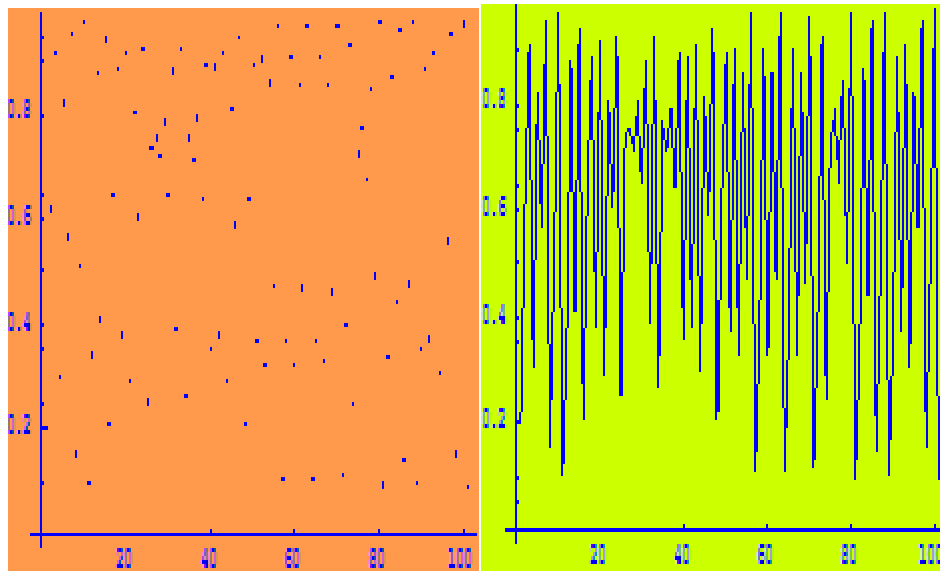
Esta ecuación representa un sistema dinámico discreto en una dimensión, su espacio de fase es el intervalo  $[0, 1]$ . El parámetro  $r$  gobierna el comportamiento del sistema, el cambio del valor de  $r$  hará que la ecuación tenga distintos tipos de comportamiento. Cuando  $r \in [0, 3]$ , el atractor es un punto fijo diferente de cero  $x_0 = 1 - \frac{1}{r}$ , si  $r \in [3, 1 + \sqrt{6}]$ , el punto fijo se torna inestable y el atractor es una órbita de periodo 2, finalmente cuando  $r \in (1 + \sqrt{6}, 4]$ , la ecuación tiene infinitos puntos periódicos inestables y las soluciones no convergen a ninguna órbita estacionaria o periódica. El equilibrio dinámico es un atractor extraño y el sistema se encuentra en un régimen caótico. En el Gráfico 4 se presenta el diagrama de bifurcación para el modelo logístico, en el eje vertical se encuentra el valor de  $x \in [0, 1]$  y en el horizontal el valor de  $r \in [2, 4]$ , en el Gráfico 4.1 se muestra la trayectoria para  $r = 3.9$ ,  $x_0 = 0.2$  para 100 iteraciones.

**Gráfico 4** Bifurcación del parámetro  $r$ ,  $r \in [2, 4]$ ,  $x \in [0, 1]$



Fuente: Elaboración de los autores

**Gráfico 4.1** Trayectoria de la función logística para  $r = 3.9$ ,  $x_0 = .2$  y para 100 iteraciones



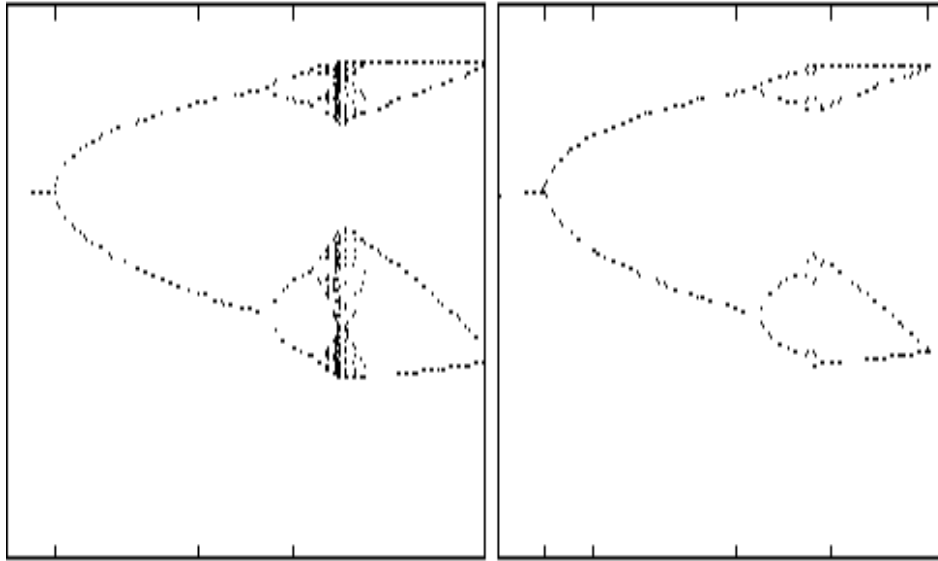
Fuente: Elaboración de los autores

Una forma de controlar el caos en este modelo es con la ayuda de un control limitador o control duro como umbral superior. Para aplicar un controlador para limitar el caos en el modelo logístico, la ecuación 4, se modifica de la manera siguiente:

$$f_c(x_t) = \min\{r(1-x_t)x_t, c\} \quad (4.1)$$

En esta ecuación  $c \in (0, 1)$ , el diagrama de bifurcación para diferentes valores del controlador  $c$  se muestra en el Gráfico 3.2, el comportamiento caótico ha sido forzado a una oscilación periódica con la desaparición de caos.

**Gráfico 4.2** Diagrama de bifurcación,  $r \in [2,4]$ ,  $x \in [0,1]$ , el controlador tiene los valores  $c=0.9$  y  $c=0.89$



Fuente: Elaboración de los autores

#### 4.1.2 El modelo de crecimiento económico de Solow y su control limitador

El Modelo de Crecimiento Económico de Robert M. Solow, (Solow R. M., 1956), fue elaborado a partir del Modelo de Domar, para demostrar que la trayectoria de crecimiento de dicho modelo puede no tender al equilibrio, si se cambia la función de producción que Domar utilizó en su análisis. Domar supuso una función de producción definida como  $f(k_t) = \rho K_t$ , lo cual significa que la producción depende sólo de las existencias de capital, o bien, que el trabajo está combinado con el capital en una proporción fija. En cambio, Solow planteó que el capital y el trabajo pueden combinarse en proporciones variables, de tal manera que la producción, a nivel macroeconómico, puede definirse en forma explícita como una función del capital y el trabajo. Es decir:  $f(k_t) = F(K_t, L_t)$ .

El modelo de crecimiento de Solow en tiempo discreto. Una versión detallada del modelo de Solow puede encontrarse en Palmisiani C. (Palmisiani C., 2008), aquí solo se expone brevemente. Considérese una economía de un solo bien, o sea una economía en la cual solamente un bien se produce y se consume, suponga además que el tiempo  $t$  es discreto. Se definen las siguientes variables:  $Y_t, K_t, C_t, I_t, L_t, S_t$ , las cuales respectivamente indican, el total de la producción o ingreso nacional, el capital disponible, el consumo, la inversión, la mano de obra o fuerza laboral y el ahorro. El capital y la fuerza laboral al tiempo  $t = 0$  están dados por:  $K_0, L_0$ . La constante  $s$  representa la propensión marginal al ahorro, mientras que la constante  $n$  representa la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo. Los supuestos del modelo son:

- 1.- Se produce un solo bien en la economía y para todos los tiempos  $t = 0,1,2, \dots$ , la economía está en equilibrio, esto es el total de la producción o ingreso nacional  $Y_t$  es igual al consumo  $C_t$  mas la inversión  $I_t$ :  $Y_t = C_t + I_t$ .
- 2.- La inversión en el tiempo  $t$  corresponde a todo el capital disponible producido en el tiempo  $t + 1$ :  $I_t = K_{t+1}$ .

3.- El ahorro es igual a la inversión y Los agentes económicos ahorran una fracción constante del ingreso:

$$S_t = I_t = sY_t, \quad (0 < s < 1)$$

4.- Para el tiempo  $t$  el ingreso que se genera se debe a la combinación de dos factores o insumos productivos: el capital y la mano de obra:  $Y_t = F(K_t, L_t)$

5.- La mano de obra crece como una progresión geométrica en la razón  $n$ :

$$L_t = (1 + n)^t L_0$$

De los supuestos 1 y 3 se tiene:  $Y_t = C_t + S_t$ , o  $I_t = S_t$ . Por lo que, aplicando los supuestos 2 y 3 se obtiene  $K_{t+1} = sY_t$ . Finalmente aplicando el supuesto 4 se obtiene  $K_{t+1} = sF(K_t, L_t)$ . A partir de esta expresión se obtiene  $K_{t+1}/L_{t+1} = sF(K_t, L_t)/L_{t+1}$ . Si  $F$  es lineal y homogénea (esto es  $F$  muestra retornos a escala constante),  $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$  para toda  $\lambda > 0$ . Con lo cual se tiene:

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = sL_t F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) / L_t (1 + n). \quad (4.2)$$

Si se define  $k_t = K_t/L_t$  como la razón de capital-labor o capital por trabajador y  $y_t = Y_t/L_t$  como la razón de ingreso-labor o ingreso por trabajador, entonces se puede obtener la función de producción en la forma intensiva:  $y_t = f(k_t) = f\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$ , por lo tanto se obtiene la función de acumulación para el modelo de Solow en tiempo discreto:

$$k_{t+1} = sf(k_t)/(1 + n) \quad (4.3)$$

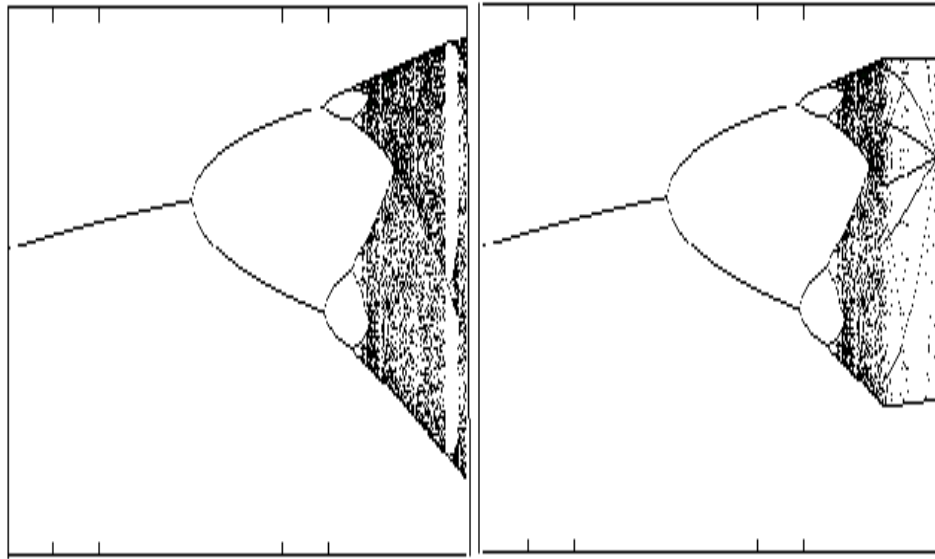
Donde como antes  $s$  es la función de propensión al ahorro,  $f(k_t)$  es la función de producción,  $n > 0$  es la razón de crecimiento de la fuerza de trabajo, la cual es un parámetro exógeno. Ejemplo 1. Si se escoge una tasa de ahorro constante  $\sigma$  y una forma del tipo de Cobb-Douglas modificada para la función de producción  $f(k_t) = Bk_t^\beta (m - k_t)^\gamma$ ,  $k_t < m$ , entonces la función de acumulación para el Modelo de Solow, en tiempo discreto es:

$$k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^\beta (m - k_t)^\gamma}{1 + n} \quad (4.4)$$

Donde  $m$  es una constante positiva y  $0 < \beta \leq 1.2$ ,  $0 < \gamma \leq 1.2$  y  $B > 0$ . Si en esta ecuación escogemos  $R = \frac{B}{1+n}$ ;  $\sigma=1$ ;  $m=1$ ;  $\beta=1.2$  y  $\gamma=1.2$ , se obtiene que  $k$  converge al valor de 0.5589, cuando  $R=3.0$ .

Cuando cambiamos el valor de  $R$ , a  $R=4.0$ , se presenta un ciclo estable de periodo dos; los valores correspondientes de  $k$  son: 0.5279 y 0.7550. Cuando  $R=4.5$ , tenemos un ciclo estable de periodo cuatro, con los correspondientes valores de  $k$  siguientes: 0.8512, 0.7912, 0.5187 y 0.3771. Finalmente, para  $R > 4.8$ , el comportamiento del sistema es caótico. Se puede mostrar que si  $R=4.4$  y  $\gamma=1.05$ , el sistema también tiene un comportamiento caótico. En el Gráfico 4.3 se muestra el diagrama de bifurcación para el caso en que no hay control de caos y cuando se usa un control duro en el umbral superior  $c=0.9$ .

**Gráfico 4.3** En ambas gráficas,  $r \in [3,5]$ ,  $x \in [0,1]$ , sin controlador para la gráfica de la izquierda y con el controlador  $c=0.9$ , para la gráfica de la derecha



Fuente: Elaboración de los autores

Ejemplo 2. Si se generaliza la propensión al ahorro como  $s = s(k_t)$ , (Day, R. H., 1982), entonces es posible generalizar el Modelo de Solow en tiempo discreto. Con una función de producción tipo Cobb-Douglas  $f(k_t) = Bk_t^\beta$  ( $B \geq 2, 0 < \beta < 1$ ) y con una función de ahorro  $s(k) = a(1-b/r)k$ , propuesto por Day, (Day, R. H., 1982), donde:  $r = f'(k_t) = \beta \frac{y_t}{k_t}$ ,  $a > 0, b > 0$ . Con estos resultados la función de acumulación para el Modelo de Solow es:

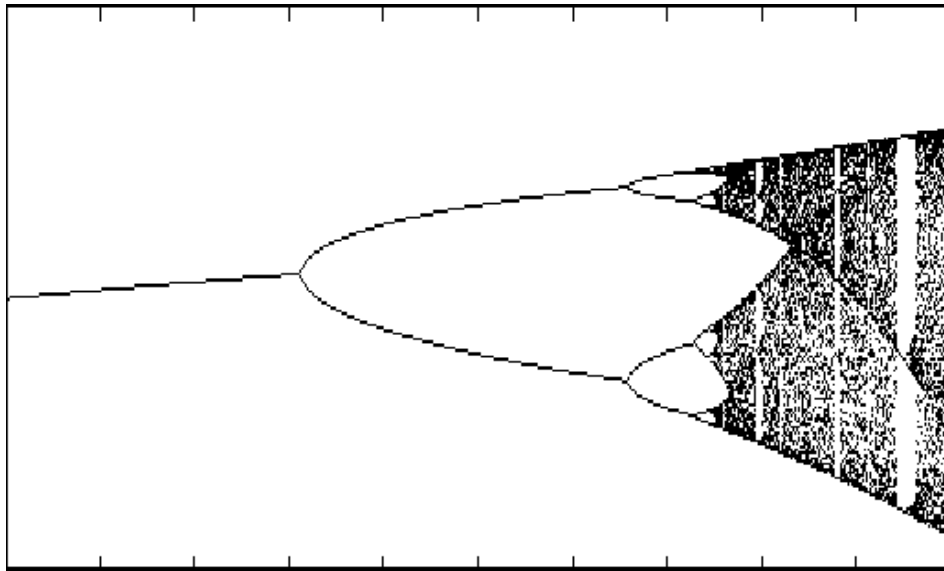
$$k_{t+1} = \left[ \frac{a}{1+\lambda} \right] k_t \left[ 1 - \frac{b}{\beta B} k_t^{1-\beta} \right] \quad (4.5)$$

Si definimos  $R = \frac{a}{1+\lambda}$ , y escogemos  $\beta=0.2$ ,  $b/\beta B=1.2$ , encontramos que cuando  $R=3.0$ , el valor de  $k$  converge a 0.5204. Pero si  $R=3.5$ , el sistema presenta un ciclo estable de periodo dos, con los valores de  $k$  iguales a 0.6634 y 0.3960, con un valor inicial de  $k_0=0.5$ , y cuando  $R>3.9$ , el sistema muestra trayectorias caóticas, el diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en el Gráfico 4.4.

Los diagramas de bifurcación para el Modelo de Solow, cuando se aplican controles limitadores  $c=0.74$  y  $c=0.71$ , se muestran en el Gráfico 4.5.

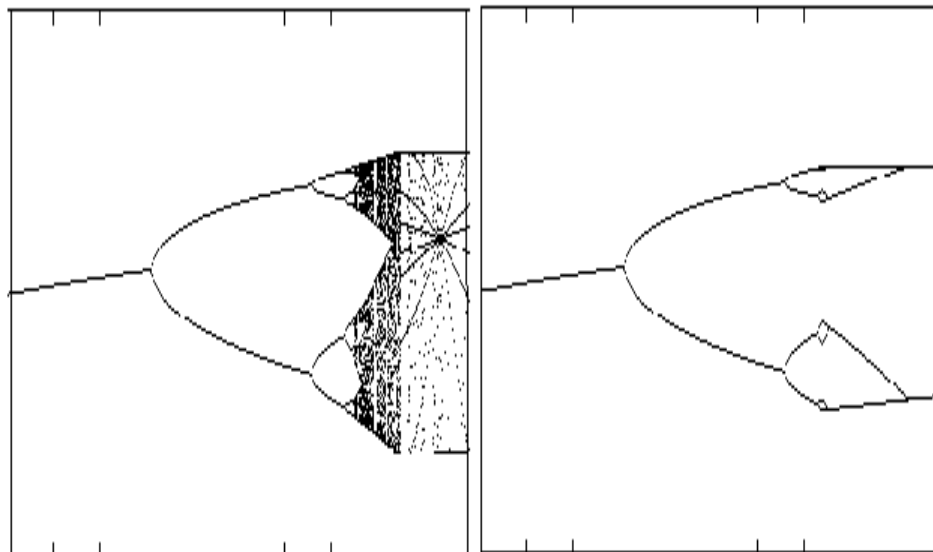


**Gráfico 4.4** En esta gráfica  $r \in [3,5]$ ,  $x \in [0,1]$ , sin ningún control para eliminar el caos



Fuente: Elaboración de los autores

**Gráfico 4.5** Gráfica de bifurcación para el Modelo de Solow,  $r \in [3,5]$ ,  $x \in [0,1]$ , el controlador es  $c=0.74$  y  $c=0.71$ , en este último caso el caos es completamente controlado



Fuente: Elaboración de los autores

#### 4.1.3 El modelo de Benhabib y Day con un controlador limitador

Una versión detallada del modelo de generaciones que se traslapan se puede encontrar en Benhabib y Day, (Benhabib y Day,1982). Aquí solo exploraremos brevemente el modelo y el interés se centra en el control de caos con un controlador duro.

El modelo de Benhabib y Day del consumo entre generaciones que coexisten simultáneamente o que se traslapan considera el intercambio entre las generaciones de una población, creciendo a una tasa  $\gamma$ . Un individuo típico de esa población vive durante dos periodos, de tal manera que cuando es joven, lleva a cabo un consumo no negativo en su juventud  $c_0(t)$  y en su vejez  $c_1(t + 1)$ . Las preferencias de dicho individuo son representadas por una función de utilidad expresada en términos de los dos periodos de consumo señalados  $U(c_0(t), c_1(t + 1))$  y recibe una riqueza  $w_0$  en su juventud y  $w_1$  en su vejez. El factor de interés en el tiempo  $t$ , denominado  $\rho_t$ , el cual define la tasa de intercambio entre el consumo presente y futuro, determina la restricción presupuestaria del individuo:

$$c_1(t + 1) = w_1 + \rho_t(w_0 - c_0(t)); \quad c_0(t) \geq 0, c_1(t + 1) \geq 0 \quad (4.6)$$

A partir del supuesto de que la riqueza agregada crece a la tasa  $\gamma$  la condición de equilibrio del mercado para la economía en su conjunto es:

$$(1 + \gamma)(w_0 - c_0(t)) + w_1 - c_1(t) = 0 \quad (4.7)$$

La condición de equilibrio (8), junto con la restricción presupuestaria (7), define el conjunto de posibilidades de consumo para esta economía.

Se puede definir  $(c_0^*(t), c_1^*(t + 1))$ , como el vector de consumo que maximiza la utilidad de la  $t$ -ésima generación sujeta a su restricción presupuestaria dada por la ecuación (7).

Si se considera  $U(c_0^*(t), c_1^*(t + 1); \rho_t, w_0, w_1) = U^*(\rho_t, w_0, w_1)$ , entonces un intercambio de equilibrio puro y dinámico consiste de las secuencias de precio y consumo en las cuales éstas últimas son óptimas individualmente y son consistentes, es decir, el óptimo de la función de utilidad se obtiene cuando esta función se evalúa en los consumos óptimos.

Es conveniente definir una trayectoria de intercambio puro de equilibrio como una sucesión de vectores  $(\rho_t, c_0(t), c_1(t))_{t=1}^{\infty}$  tal que, para todo  $t$ ,

$$U(c_0(t), c_1(t + 1); \rho_t, w_0, w_1) = U^*(\rho_t, w_0, w_1) \quad (4.8)$$

Y la condición de equilibrio de mercado ecuación (8) se cumple.

Por lo anterior, los miembros de cada generación pueden ya sea ahorrar o pedir prestado en su juventud, así que serán acreedores o deudores en su vejez, de manera que deberán saldar sus pasivos o activos con los miembros de las nuevas generaciones. En la senectud, o bien se reclaman los beneficios por los ahorros realizados en la juventud, o se pagan las deudas contraídas, lo cual corresponde, respectivamente, con los ahorros o los préstamos otorgados a las nuevas generaciones.

La trayectoria del precio de equilibrio, o del factor de interés, asegura que los cobros, o deudas, de la generación en la etapa de la senectud sean iguales a los ahorros, o gastos, de la generación joven. Desde luego, deben existir instituciones encargadas de asegurar los pagos o los cobros, tales como un sistema de seguridad social. Alternativamente, la existencia de una riqueza o activos no perecederos y negociables, puede servir también como un medio adecuado de intercambio y como depósito o reserva de valor. Ciertamente, existen modelos donde se introduce el crédito para fungir como medio de intercambio intergeneracional.

Para caracterizar la dinámica de intercambio puro entre trayectorias de equilibrio se consideran los siguientes supuestos:

Supuesto 1. La función de utilidad para la generación representativa es estrictamente cóncava, doblemente diferenciable, creciente en sus argumentos y separable u homotética.

Supuesto 2. Para los precios a lo largo de la trayectoria de equilibrio, la solución al problema de maximización de la utilidad de cada generación es endógeno, es decir,  $c_0(t), c_1(t) > 0$  para  $t = 0, 1, 2, \dots$

Se puede mostrar que bajo el supuesto 2, las condiciones de primer orden para el problema de maximización de la utilidad dada en la ecuación (9), se reduce a:

$$\rho_t = \frac{U_0(c_0(t), c_1(t+1))}{U_1(c_0(t), c_1(t+1))} \quad (4.9)$$

En esta ecuación,  $U_0$  y  $U_1$  son las derivadas parciales de  $U$ , con respecto a  $c_0$  y  $c_1$ . El siguiente paso importante, es sustituir (10) en la restricción presupuestal del individuo dada en la ecuación (4.6), para lo cual es pertinente primero despejar  $\rho_t$  de la ecuación (4.6). Entonces:

$$\rho_t = \frac{w_1 - c_1(t+1)}{c_0(t) - w_0}$$

Al igualar este resultado con la ecuación (10), se obtiene:

$$\frac{U_0(c_0(t), c_1(t+1))}{U_1(c_0(t), c_1(t+1))} = \frac{w_1 - c_1(t+1)}{c_0(t) - w_0} \quad (4.10)$$

A partir de aquí, se necesita expresar la ecuación (4.10) como una ecuación en diferencias en  $c_0(t)$  o  $c_1(t)$ . Para esto es conveniente definir la función de la tasa marginal de sustitución restringida como:

$$V(c_0(t); w_0, w_1) = \frac{U_0(c_0(t), c_1(t+1))}{U_1(c_0(t), c_1(t+1))} \quad (4.11)$$

La función  $V$  describe la tasa marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro, para un programa de consumo óptimo y factible de un individuo, es decir, un conjunto de posibilidades de consumo que satisface la restricción presupuestal del individuo.

Al resolver la ecuación (4.7) para  $c_1(t)$ .

$$c_1(t) = (1 + \gamma)(w_0 - c_0(t)) + w_1 \quad (4.12)$$

Como la ecuación (9) es válida para toda  $t$  entonces es válida para  $t+1$ :

$$c_1(t+1) = (1 + \gamma)(w_0 - c_0(t+1)) + w_1 \quad (4.13)$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (4.6), se obtiene:

$$(1 + \gamma)(w_0 - c_0(t + 1)) + w_1 = w_1 + \rho_t(w_0 - c_0(t)) \quad (4.14)$$

O bien:

$$(w_0 - c_0(t + 1)) = \frac{\rho_t(w_0 - c_0(t))}{(1 + \gamma)} \quad (4.15)$$

Si despejamos  $c_0(t + 1)$  obtenemos:

$$c_0(t + 1) = w_0 - \frac{\rho_t(w_0 - c_0(t))}{(1 + \gamma)} \quad (4.16)$$

Entonces, a partir de esta ecuación y sustituyendo  $V(c_0(t); w_0, w_1) = \rho_t$ , obtenemos la ecuación en diferencias para  $c_0(t)$ , la cual expresa la dinámica del sistema.

$$c_0(t + 1) = w_0 + \frac{V(c_0(t); w_0, w_1)(c_0(t) - w_0)}{(1 + \gamma)} \quad (4.17)$$

La expresión (4.17), es la ecuación del modelo de generaciones que coexisten simultáneamente o de generaciones que se traslapan. Por lo tanto, la ecuación en diferencias (18), caracteriza las trayectorias del intercambio puro de equilibrio cuando  $c_0(0) > w_0$ . Gale, (Gale, 1973), citado por Benhabib y Day, observó que en el caso de los ciclos, la trayectoria sería convergente hacia un estado estacionario, o bien, hacia un ciclo limitado o acotado. Sin embargo, Benhabib y Day mostraron que tales trayectorias cíclicas pueden oscilar sin converger a ciclos de ningún orden.

Ejemplo. La ecuación en diferencias para el consumo es:

$$c_0(t + 1) = w_0 + \frac{1}{1 + \gamma} V(c_0(t); w_0, w_1)(c_0(t) - w_0) \quad (4.18)$$

Donde la función de la tasa marginal de sustitución,  $V(c_0(t); w_0, w_1)$ , es:

$$V(c_0(t); w_0, w_1) = \frac{U_0(c_0(t), c_1(t + 1))}{U_1(c_0(t), c_1(t + 1))} \quad (4.19)$$

Si consideramos la función de utilidad cóncava:

$$U(c_0, c_1) = A - \exp[a(1 - ((c_0 - w_0)/a))] + c_1 \quad (4.20)$$

Entonces:

$$U_0 = \frac{\partial}{\partial c_0} U(c_0, c_1) = -\exp[a(1 - ((c_0 - w_0)/a))] \frac{\partial}{\partial c_0} a[1 - ((c_0 - w_0)/a)] \quad (4.21)$$

Así que:

$$U_0 = \exp[a(1 - ((c_0 - w_0)/a))] \quad (4.22)$$

También:

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial c_1} U(c_0, c_1) = 1 \quad (4.23)$$

Por lo anterior, la tasa marginal de sustitución queda de la manera siguiente:

$$V(c_0(t), w_0, w_1) = \exp[a(1 - ((c_0 - w_0)/a))] \quad (4.24)$$

Sustituyendo esta última ecuación, en la ecuación para  $c_0(t+1)$  y considerando que  $\gamma=0$ , obtenemos:

$$c_0(t+1) - w_0 = \exp[a(1 - ((c_0 - w_0)/a))](c_0(t) - w_0) \quad (4.25)$$

Esta ecuación puede ser escrita de la manera siguiente:

$$x_{t+1} = rx_t e^{-x_t} \quad (4.26)$$

Donde:

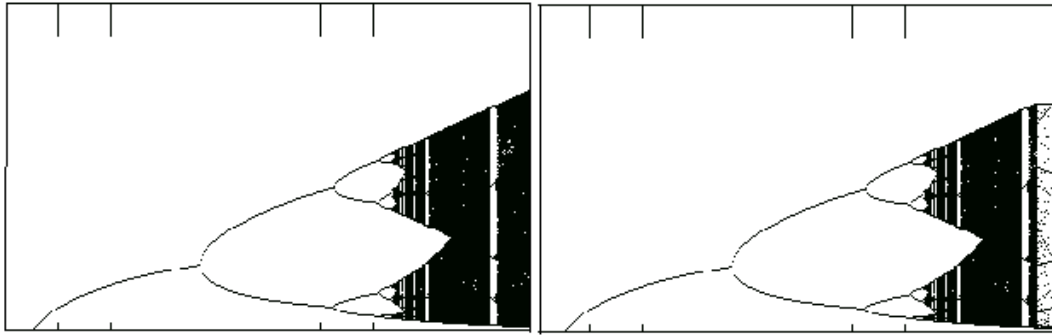
$$x_{t+1} = c_0(t+1) - w_0 \quad x_t = c_0(t) - w_0 \quad r = e^a \quad (4.27)$$

Para  $r=5$  y  $x_0=0.5$ , la solución de la ecuación del sistema converge a 1.6094. Cuando  $r=10$  y  $x_0=0.5$ , después de realizar 500 iteraciones, la solución de la ecuación del sistema presenta un ciclo estable de periodo dos, con los valores siguientes:  $x_{501}=3.6706$ ,  $x_{502}=0.9346$

Si  $r=14$  y  $x_0=0.5$ , se presenta un ciclo estable de periodo cuatro, con los siguientes valores para  $x$ : 3.9005, 1.1048, 5.1239, 0.4270

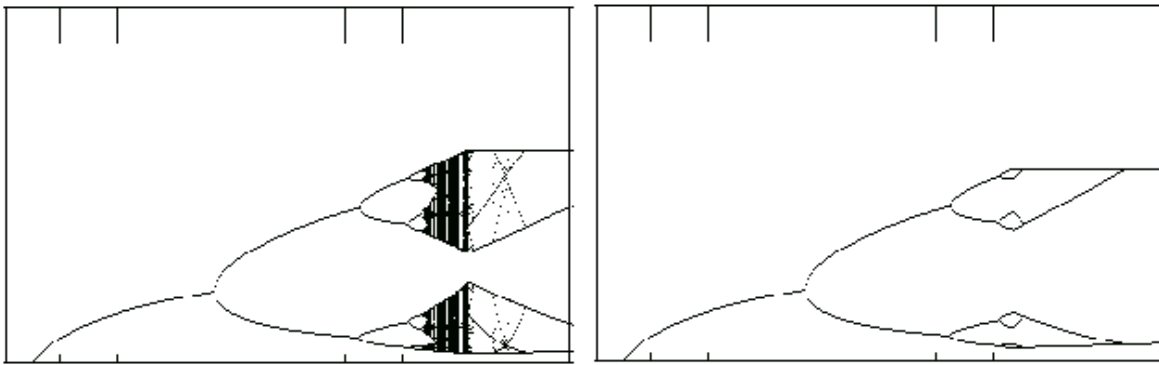
Con  $r=14.765$  y  $x_0=0.01$ , tenemos un ciclo estable con periodo 64. Cuando  $r>15$ , el sistema es caótico. En el Gráfico 4.6 se muestra el diagrama de bifurcación cuando no hay control de caos y control de caos con un controlador duro  $c=7.0$  y en la figura (8) se muestra el control del caos determinista para otros valores del control  $c$ .

**Gráfico 4.6** En esta gráfica se muestra el diagrama de bifurcación sin un control y cuando se controla el caos con un controlador limitador de  $c=7.0$



Fuente: Elaboración de los autores

**Gráfico 4.7** Se muestra el diagrama de bifurcación con un controlador  $c=6.0$ , izquierda y cuando  $c=5.4$ , se controla completamente el caos



Fuente: Elaboración de los autores

## 4.2 Conclusiones

En este trabajo se analizaron tres modelos económicos en tiempo discreto para el control de caos clásico, dos del tipo de Solow y el modelo de crecimiento de Benhabib y Day para generaciones que se traslapan. Para el control de caos se usó el control limitador o control duro, en primer lugar se controló el caos para el modelo logístico como un ejemplo para posteriormente aplicar este método a los modelos económicos mencionados. Se mostró el control de caos para estos modelos para diferentes valores del controlador. Se usó el controlador en el umbral superior. Finalmente se elaboraron las gráficas de bifurcación para cada uno de los sistemas analizados.

## 4.3 Referencias

Abed, E. H., Wang, H. O. y Chen, R. C., (1992), Stabilization of period doubling bifurcations and implications for control of chaos. In: Proc. 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, 2119-2124.

Agiza, H. N., (2002), Controlling chaos for the dynamical system of coupled dynamos. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 13., 2, 341–352.

- Bai, E. W. y Lonngren, K. E., (2000), Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 11, no. 7, 1041–1044.
- Benhabib, J. y Day, R. H., (1982), A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model. In *Journal of Economic Dynamics and Control*. 4, 37-55.
- Chen, P., (1988) Empirical and theoretical evidence of economic chaos. *Syst Dynam Rev* 4, 81-108.
- Day, R. (1982), Irregular Growth Cycles. *American Economic Review* 72(3), 406-414.
- Dressier, U. and Nitsche, G., (1992), Controlling Chaos using time delay coordinates. *Phys. Rev. Lett.* 68, 1-4.
- Feichtinger, G., (1992), Nonlinear threshold dynamics: further examples for chaos in social sciences. In: Haag G, Mueller U, Troitzsch KG (eds) *Economic evolution and demographic change*. Springer, Berlin.
- Gale, D., (1973), Pure exchange equilibrium of dynamic economic model, *Journal of Economic Theory* 6, 12-36.
- Haag, G., (1990), A master equation formulation of aggregate and disaggregate economic decisionmaking. *Sistemi Urbani* 1, 65-81
- Haag, G., (1992), Chaotic behaviour in spatial systems and forecasting. *Rev d'Econ Reg Urb* 5, 735-751.
- Haag, G., Hilliges, M. y Teichmann, K., (1993), Towards a dynamic disequilibrium theory of economy. In: Nijkamp P, Regiani A (eds) *Nonlinear evolution of spatial economic systems*. Springer, Berlin.
- Hytyniemi, H., (1991), Postponing Chaos using a robust stabilizer. In: *Proc. 1st IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems*, Zurich, 568-572.
- Liao, T. L. y Lin, S. H., (1999), Adaptive control and synchronization of Lorenz systems. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336., 6, 925–937.
- Lorenz, H. W., (1993), *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*. Springer, Berlin.
- Mosekilde, E. y Larsen E.R., (1988), Deterministic chaos in the beer production-distribution model. *Syst Dynam Rev* 4, 131-147.
- Mosekilde, E. y Thomsen, JS., (1992), Nonlinear interactions in the economy. In: Haag G, Mueller U, Troitzsch KG (eds) *Economic evolution and demographic change*. Springer, Berlin
- Ott, E.C., Grebogi, C. y Yorke, J. A., (1990), Controlling Chaos. *Phys. Rev. Lett.* 64, 1196-1199.
- Palmisiani, C., (2008), A short survey on chaotic dynamics in Solow-Type growth models. In *Journal of applied Economic Sciences*, 270-280.
- Puu, T., (1992), A chaotic process with slow feed back: the case of business cycles. In: Haag G, Mueller U, Troitzsch KG (eds) *Economic evolution and demographic change*. Springer, Berlin

Sanchez, E. N., Perez, J. P., Martinez, M y Chen., G. R., (2002), Chaos stabilization: An inverse optimal control approach. *Latin American Applied Research*, vol. 32, no. 1, pp. 111–114.

Solow, R. M., (1956), A contribution to the Theory of Economic Growth. In *Quarterly Journal of Economics*, 65-94.

Weidlich, W., (1991), Physics and social science-the approach of synergetics. *Phys Rep* 204, 1-163.

Weidlich, W. y Braun, M., (1992) The master equation approach to nonlinear economics. *J Evol Econ*, 2, 233-265.

Yang, X. S. y Chen, G. R., (2002), Some observer-based criteria for discrete-time generalized chaos synchronization. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 13, no. 6, 1303–1308.

Yassen, M. T., (2003), Chaos control of Chen chaotic dynamical system. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 15, no. 2, 271–283.

Yassen., M. T.,(2001), Adaptive control and synchronization of a modified Chuas circuit system. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 135, no. 1, 113–128.